Capitolo 7 – Benefici della diversificazione

Obiettivi del capitolo:
Dimostrare che, quando si costruisce un portafoglio con più titoli rischiosi, minore è il coefficiente di correlazione e migliore è il trade-off tra rendimento atteso e rischio

- Per un investitore avverso al rischio il migliore trade-off possibile tra rendimento atteso e volatilità è quello che max indice di Sharpe
- Graficamente, si individua il portafoglio che si trova nel punto di tangenza tra la retta che emana dall'asset risk-free e la curva che unisce i due titoli rischiosi

Rendimento atteso e rischio con due titoli rischiosi

Consideriamo due titoli, entrambi rischiosi. Il rendimento del portafoglio è:

$$r_p = w_A r_A + w_B r_B \,, w_A + w_B = 1$$

Quindi il rendimento atteso è:

$$Er_p = w_A Er_A + w_B Er_B$$

La varianza (valore atteso del quadrato dello scarto dalla media) del rendimento è:

$$\sigma_p^2 = E\left(r_p - Er_p\right)^2 = E(w_A r_A + w_B r_B - w_A Er_A - w_B Er_B)^2 =$$

$$= E[w_A E(r_A - Er_A) + w_B E(r_B - Er_B)]^2 =$$

$$= E[w_A^2 E(r_A - Er_A)^2 + w_B^2 E(r_B - Er_B)^2 + 2 w_A w_B E(r_A - Er_A)(r_B - Er_B)]$$

Rendimento atteso e rischio con due titoli rischiosi / 2

La varianza (media del quadrato dello scarto dalla media) del rendimento è:

$$\sigma_p^2 = E\left(r_p - Er_p\right)^2 = E(w_A r_A + w_B r_B - w_A Er_A + w_B Er_B)^2 =$$
$$= E(w_A E(r_A - r_A) + w_B E(r_B - Er_B))^2 =$$
$$= E[w_A^2 E(r_A - Er_A)^2 + w_B^2 E(r_B - Er_B)^2 + 2w_A w_B E(r_A - Er_A)(r_B - Er_B)] =$$

$$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_{AB}$$

E la covarianza tra i due titoli rischiosi è: $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$

$\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A\sigma_B}$ è il coefficiente di correlazione, una misura della forza e della direzione della relazione lineare tra due variabili; $\rho_{AB}[-1;+1]$

Rendimento atteso e rischio con due titoli rischiosi / 3

$\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B}$ è il coefficiente di correlazione, una misura della forza e della direzione della relazione lineare tra due variabili; $\rho_{AB}[-1;+1]$

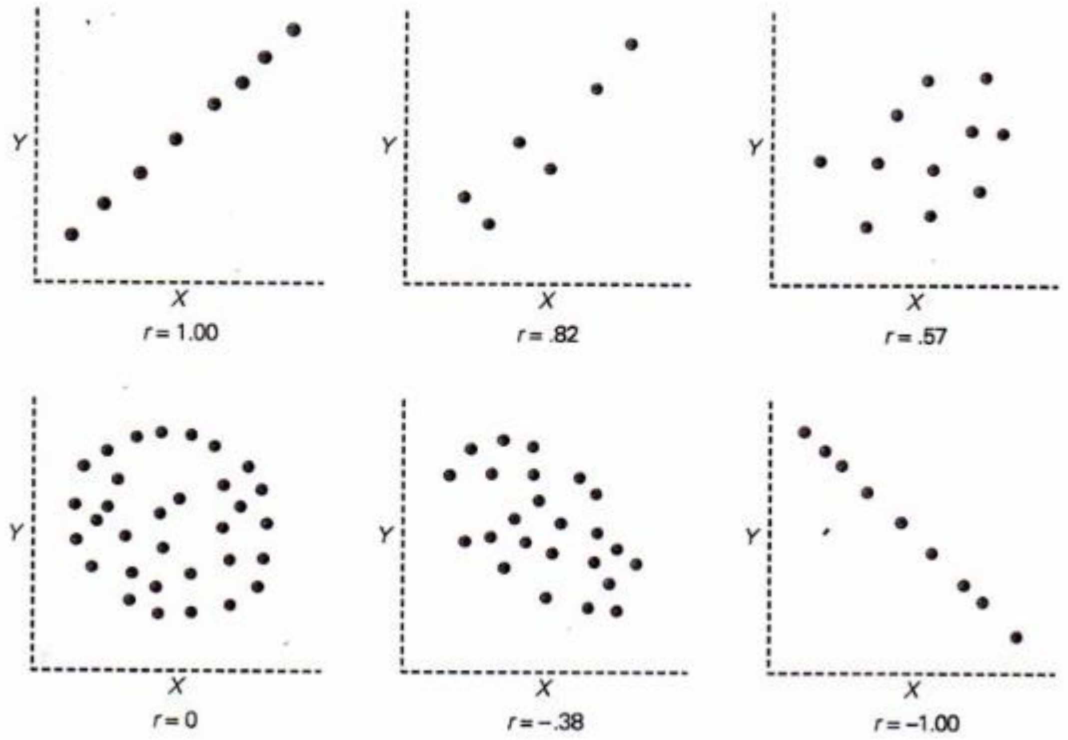


Fig. 6.3 - *Alcuni possibili diagrammi e relativo coefficiente di correlazione.*

Rendimento atteso e rischio con due titoli rischiosi / 4

$$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_{AB} \ // \ \sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}$$

$$\sigma_p = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}}$$

Determinare il rischio di un portafoglio descritto dai seguenti parametri: $\sigma_A = 20\%, \sigma_B = 5\%, w_A = 30\%, w_B = 70\%$ per differenti valori del coefficiente di correlazione

$$\rho_{AB} = 0{,}5;\ \sigma_p = \sqrt{0{,}3^2 0{,}2^2 + 0{,}7^2\ 0{,}05^2 + 2 * 0{,}3 * 0{,}7 * 0{,}2 * 0{,}05 * \mathbf{0{,}5}} = 0{,}083$$

$$\rho_{AB} = 0;\ \sigma_p = \sqrt{0{,}3^2 0{,}2^2 + 0{,}7^2\ 0{,}05^2 + 2 * 0{,}3 * 0{,}7 * 0{,}2 * 0{,}05 * \mathbf{0}} = 0{,}069$$

$$\rho_{AB} = 1;\ \sigma_p = \sqrt{0{,}3^2 0{,}2^2 + 0{,}7^2\ 0{,}05^2 + 2 * 0{,}3 * 0{,}7 * 0{,}2 * 0{,}05 * \mathbf{1}} = 0{,}095$$

- La riduzione del coefficiente di correlazione consente di ridurre la volatilità del portafoglio

I benefici della diversificazione

$$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_{AB} \;\; //\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}$$

$$\sigma_p = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}}$$

Con due titoli rischiosi è difficile, dal punto di vista del calcolo, individuare una unica relazione tra rendimento atteso e volatilità. A meno che ρ_{AB}=1.

$$\sigma_p = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_A\sigma_B} = \sqrt{(w_A\sigma_A + w_B\sigma_B)^2} = w_A\sigma_A + w_B\sigma_B$$

- Nel caso in cui ρ_{AB}=1, la volatilità del portafoglio è pari alla media ponderata delle volatilità dei due titoli rischiosi

- Qualsiasi ρ_{AB}<1 fornisce una volatilità del portafoglio inferiore alla media ponderata delle volatilità [Ricorda: la volatilità diminuisce al diminuire di ρ_{AB}]

  - ➢ Acquistando due titoli (diversificazione) con bassa correlazione si può ridurre la volatilità

I benefici della diversificazione / 2

Da $\sigma_p = w_A\sigma_A + w_B\sigma_B = w_A\sigma_A + (1 - w_A)\sigma_B$ otteniamo $w_A = \frac{\sigma_p - \sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B}$

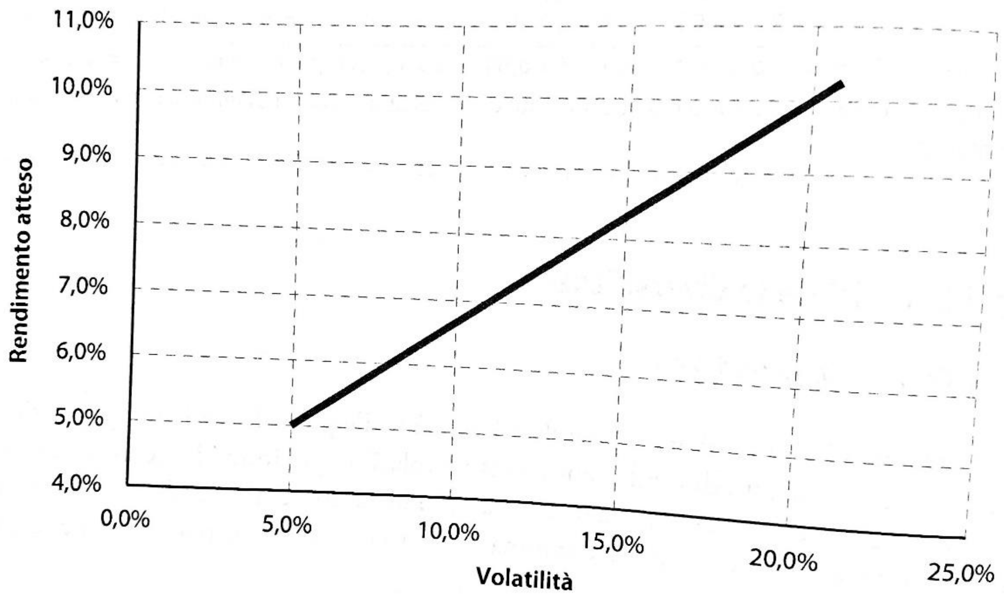
E sostituendo in: $Er_p = w_A Er_A + w_B Er_B = w_A Er_A + (1 - w_A)Er_B = Er_B + w_A(Er_A - Er_B)$

Avremo: $Er_p = Er_B + \frac{\sigma_p - \sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B}(Er_A - Er_B)$

- Questa è una retta nello spazio volatilità /rendimento atteso di un portafoglio e generalizza l'equazione trovata nel caso di un asset risk-free

- Ad ogni punto corrisponde un portafoglio differente
- n.b. volatilità ≠ 0

Figura 7.1 Rendimento atteso e rischio con due titoli rischiosi



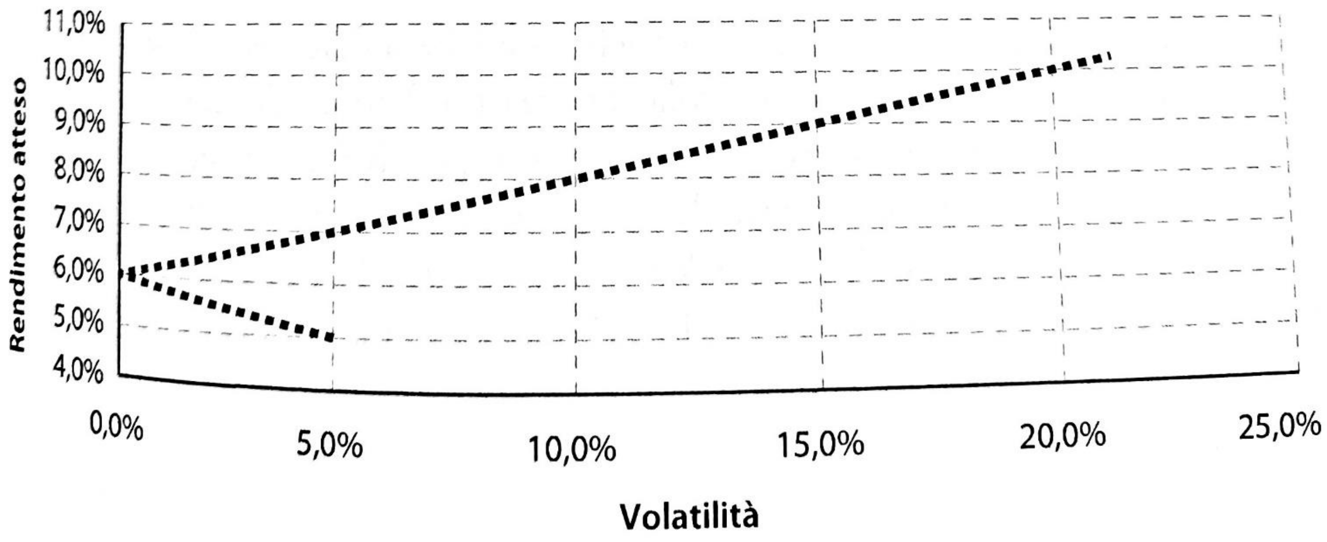
I benefici della diversificazione / 3

Con $\rho_{AB} = -1$, avremo $\sigma_p^2 = (w_A\sigma_A - w_B\sigma_B)^2$ per cui $\sigma_p = |w_A\sigma_A - w_B\sigma_B|$

E' possibile scegliere i pesi in modo da azzerare la volatilità, risolvendo:

$|w_A\sigma_A - w_B\sigma_B| = 0$ da cui otteniamo: $w_A = \frac{\sigma_B}{\sigma_A+\sigma_B}$

Figura 7.2 Rendimento atteso e rischio quando correlazione = −1



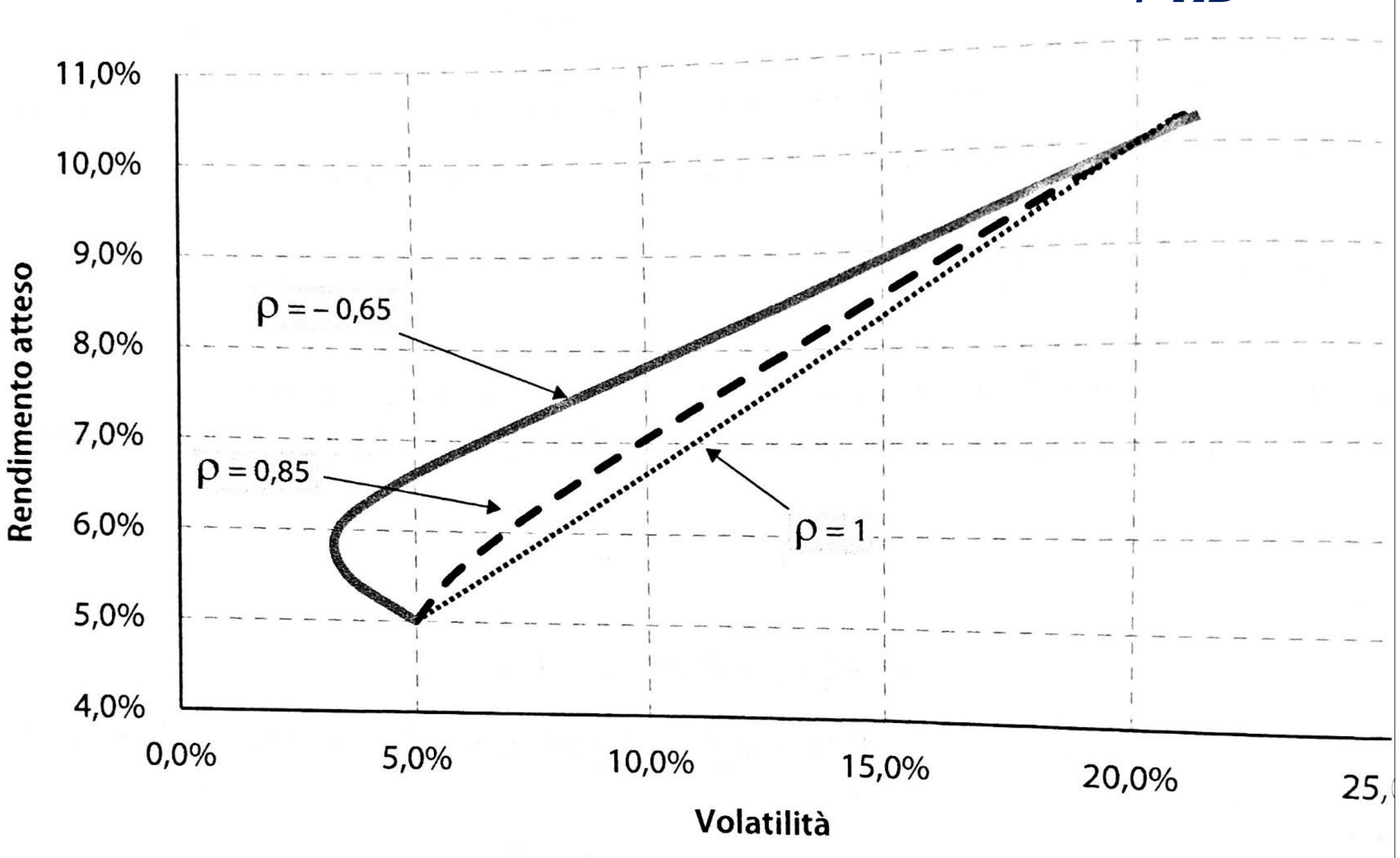
- Il portafoglio risultante si colloca sull'asse verticale

➢ Con $\rho_{AB} = -1$ è possibile comporre un portafoglio con due titoli rischiosi che abbia volatilità nulla

I benefici della diversificazione / 4

Figura 7.3 Rendimento atteso e rischio

Con un generico ρ_{AB}



Quando $\rho_{AB} = 1$ non ci sono benefici dalla diversificazione:

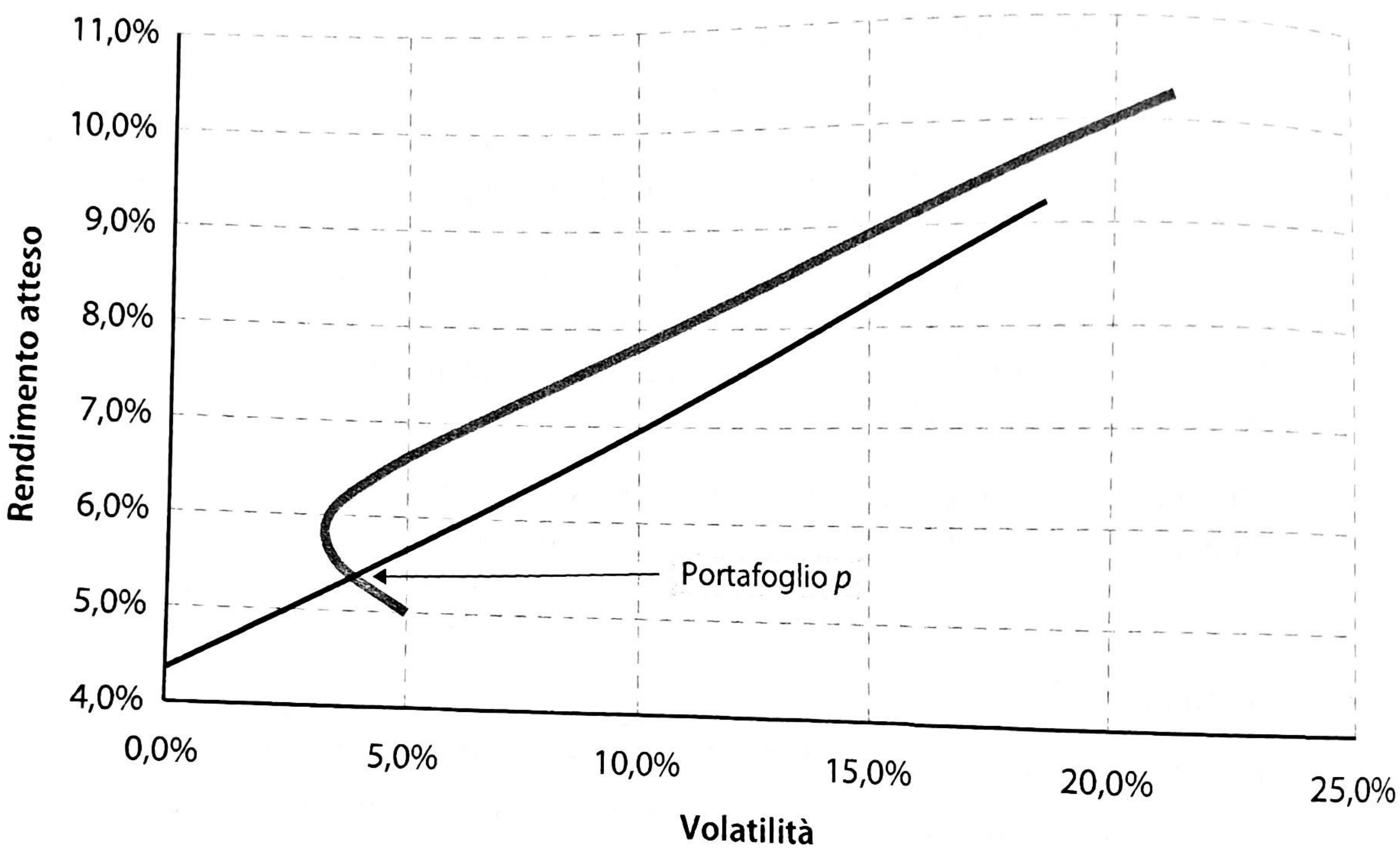
$$\uparrow Er_p \rightarrow \uparrow \sigma_p$$

Per qualsiasi valore di $\rho_{AB} < 1$ abbiamo benefici dalla diversificazione

- Ad ogni livello di rendimento atteso è associato un livello di rischio inferiore a quello che si ha nel caso di $\rho_{AB} = 1$

Asset risk-free e titoli rischiosi

Figura 7.4 Rendimento atteso e rischio con il risk-free



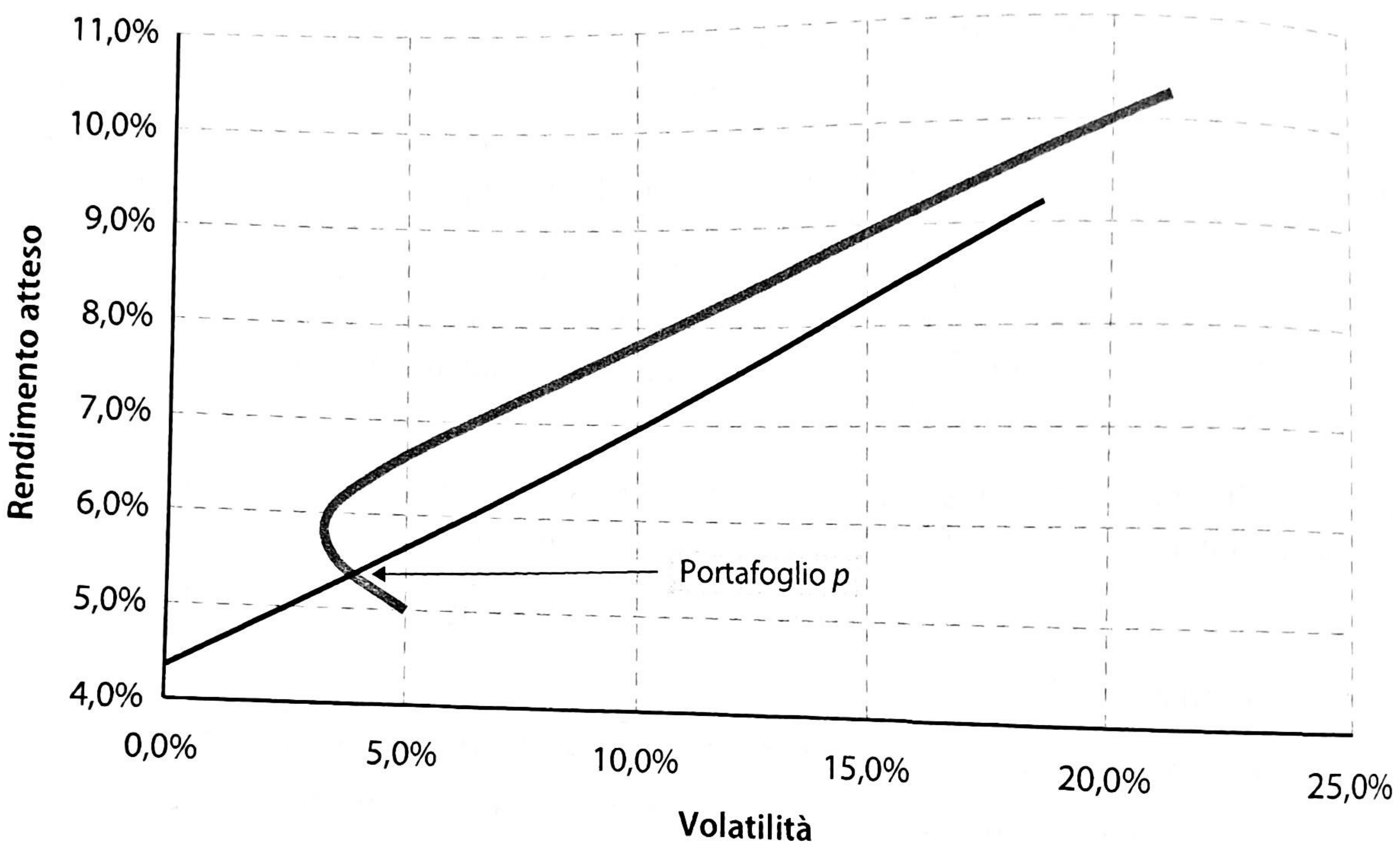
Sappiamo che i portafogli che si ottengono combinando un titolo risk-free e un titolo rischioso si trovano su una retta (CAL)

Questo resta valido anche quando dobbiamo combinare un titolo risk-free con un portafoglio costituito da titoli rischiosi

La retta individua le combinazioni rischio – rendimento atteso che si hanno combinando in varie proporzioni il titolo risk-free con un portafoglio selezionato sulla frontiera a varianza minima

Asset risk-free e titoli rischiosi / 2

Figura 7.4 Rendimento atteso e rischio con il risk-free

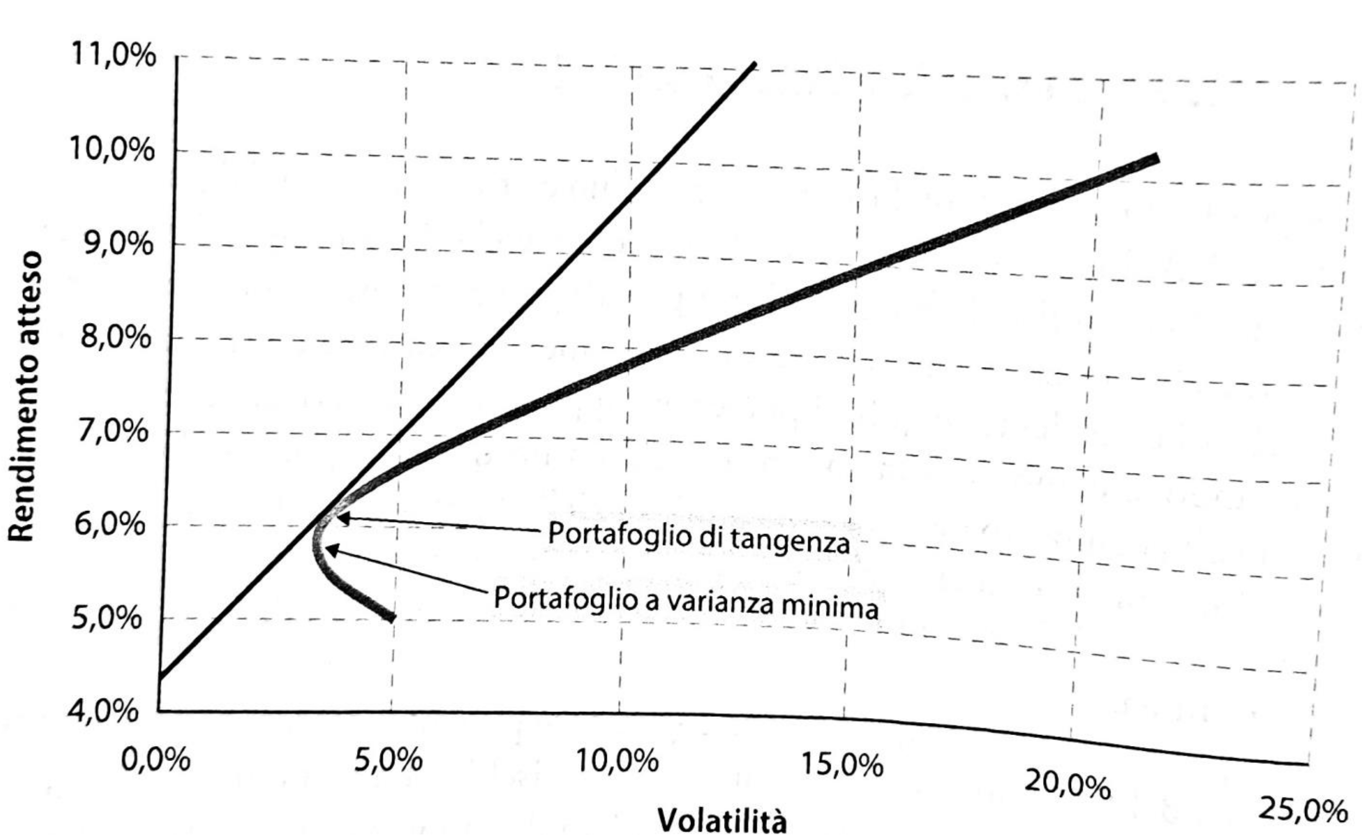


Ma il portafoglio «p» è la migliore combinazione possibile dal punto di vista del trade-off tra rendimento atteso e volatilità?

La migliore combinazione possibile è quella che massimizza il rapporto complessivo tra rendimento atteso e rischio

Asset risk-free e titoli rischiosi / 3

Figura 7.5 La Capital Allocation Line nel caso generale



La migliore combinazione possibile è quella che massimizza il rapporto complessivo tra rendimento atteso e rischio

Il «portafoglio di tangenza» è quello che combinato con un titolo risk-free massimizza il rapporto rischio e rendimento atteso

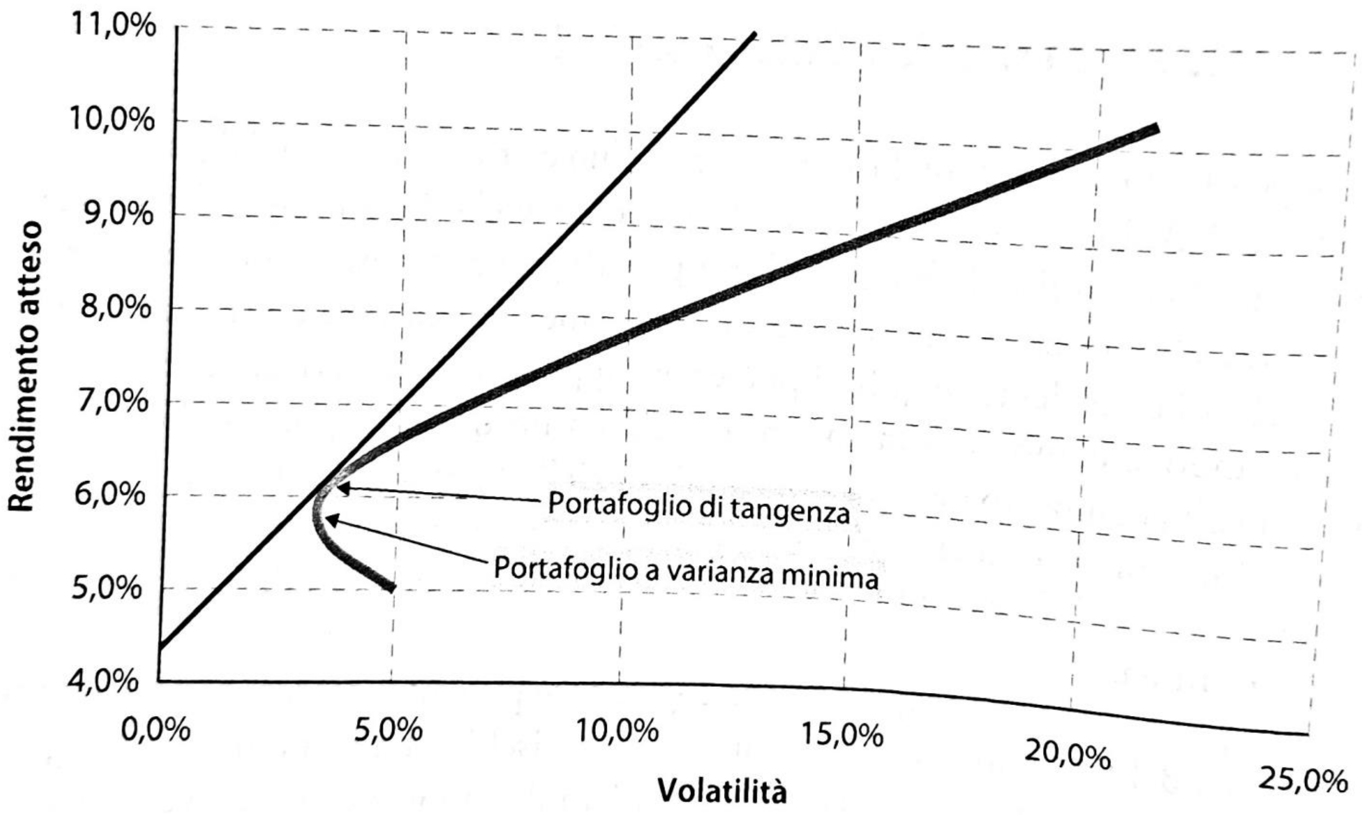
La combinazione migliore dei due titoli rischiosi è stata individuata solo sulla base di considerazioni di efficienza

L'avversione al rischio non gioca alcun ruolo

Un investitore avverso al rischio sceglierà un portafoglio che si troverà sulla retta che si ottiene combinando titolo risk-free e «portafoglio di tangenza»

Asset risk-free e titoli rischiosi / 4

Figura 7.5 La Capital Allocation Line nel caso generale



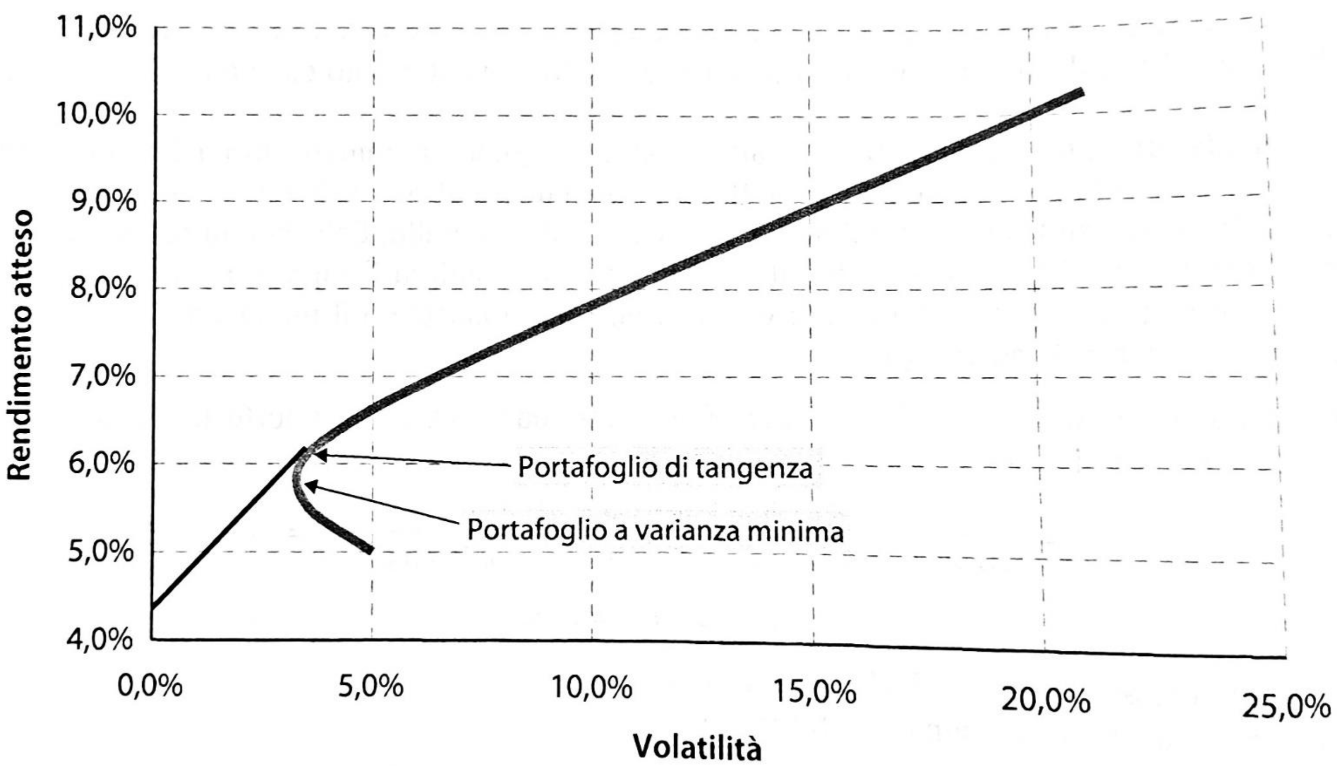
- Il «portafoglio di tangenza» si trova con $max_w \frac{Er_p - r_f}{\sigma_p}$ cioè scegliendo quote dei titoli in modo da max indice di Sharpe
- Se le quote dei titoli sono scelte per min la varianza complessiva del portafoglio $min_w \sigma_p^2$ individuiamo il «portafoglio a varianza minima»

$$w_{GMV,B} = \frac{\sigma_A^2 - cov(\sigma_A, \sigma_B)}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2cov(\sigma_A, \sigma_B)}$$

Dove $w_{GMV,B}$ indica il peso del titolo B nel portafoglio a varianza minima, che non è influenzato da rendimento atteso

Asset risk-free e titoli rischiosi / 5

Figura 7.6 La Capital Allocation Line senza leva finanziaria



- Usando la leva finanziaria ci si può indebitare per aumentare il rendimento atteso (e il rischio) del portafoglio
- Se la leva finanziaria non è consentita, l'insieme delle opportunità di investimento è dato dalla retta e dalla curva che unisce i titoli rischiosi